数理解析研究所講究録
267巻 1976年 1-6

Elliptic Fixed Points の安定性について．

慶応大．工．石井一平．

1． D を $\mathbb{R}^2$ の原点を含む領域とし．T を D から $\mathbb{R}^2$ の中への diffeomorphism で原点を fix するものとする。即ち．

$(x_1, y_1) = T(x, y)$ は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O_2 \quad ; \quad \begin{array}{l} A \in GL(2, \mathbb{R}) \\ O_2 \text{ ; 2次以上の項.} \end{array}$$

と書けるものとする。λ_1, λ_2 を A の固有値とする．このとき．$|\lambda_j| = 1 \quad (j = 1, 2)$ ならば．原点は T の elliptic fixed point であるという。ここでは．elliptic fixed point に於ける安定性について考える。そこでまず．いくつかの定義を述べる。

定義

(I) T が原点 O において stable

$\Longleftrightarrow$ 任意の O の近傍 U に対し．$T(V) = V$，$V \subset U$ となる O の近傍 V が存在する。

(Ⅱ) T が 0 において <u>unstable</u>

$\Longleftrightarrow$ ある 0 の近傍 U が存在して，任意の $a \in U$ $(a \neq 0)$ に対し，$T^n(a) \notin U$ となる整数 n がとれる。

(Ⅲ) T が 0 において <u>mixed</u>

$\Longleftrightarrow$ T が 0 において stable でも unstable でもない。

(Ⅳ) T が 0 において <u>正（負）に asymtotic</u>

$\Longleftrightarrow$ 任意の 0 の近傍 U に対し，$T(V) \subset U$ ，$\bigcap_{n \geq 0} \overline{T^n(V)} = \{0\}$ $\left(\bigcap_{n \leq 0} \overline{T^n(V)} = \{0\} \right.$ ，$\left. T^{-1}(V) \subset U \right)$ となる 0 の近傍 V が存在する。

Remark. 定義(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ) は [2] に従ったものであるが，"unstable" が "stable" の否定ではないことに注意。又，定義(Ⅳ) において，正又は負に asymtotic であることを，単に asymtotic であるという。

以上のような定義を与えると，次の定理が得られる。

<u>定理</u>： $|\lambda_j| = 1$ $(j=1,2)$ とする。このとき，$\lambda_j^n \neq 1$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$ $(j=1,2)$ ならば，次のいずれかが起こる。

1) T は 0 において unstable ではない。

2) T は 0 において asymtotic である。

この定理の証明は省略するが、それはBirkhoffが[1]において twist map に関して行なっている証明と類似の方法によってなされる。尚、twist map については、よく知られているように、後にMoserが stable であることを証明している。[2]。

この定理によって、例えばTが保測的である場合には、2)は起り得ないから、Aの固有値が1の巾根でないということだけから、Tは0において unstable ではないことがわかる。次の節でこの定理の顕著な応用例であるところの holomorphic iteration を調べてみよう。

2. holomorphic mapping

$$z_1 = f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \quad ; \quad |\lambda| = 1$$

を考える。まず一つ定義を与える。

定義: f に対する Schröder series $\varphi(\zeta) = \zeta + b_2\zeta^2 + \cdots$ とは、$f(\varphi(\zeta)) = \varphi(\lambda\zeta)$ の formal solution のことである。λ が1の巾根でなければ、f に対する Schröder series は必ず存在する。

holomorphic iteration については次のことがわかっている。

(A) $\lambda^n = 1$ かつ f は 0 において stable

$\Longleftrightarrow$ $f^n(z) \equiv z$.

(B) $\lambda^n = 1$ かつ $f^n(z) \not\equiv z$

$\Longrightarrow$ f は 0 において mixed.

(C) $|\lambda| = 1$, $\lambda^n \neq 1$ for $^\forall n \in \mathbb{Z}$ のとき.

f が 0 において stable

$\Longleftrightarrow$ f に対する Schröder series が収束.

(D) $|\lambda| = 1$ かつ ある $c, \nu\,(>0)$ に対し,

$|\lambda^n - 1| > c n^{-\nu}$ が任意の自然数 n について成り立つ.

$\Longrightarrow$ f は 0 において stable.

(E) $|\lambda| = 1$, $\lambda^n \neq 1$ for $^\forall n \in \mathbb{Z}$ で. Schröder series が発散するような f は存在する。

以上によって. λ が 1 の巾根でなく. f に対する Schröder series が発散する場合を除いては. 0 が stable, unstable, mixed のうちどの場合であるかは. 完全に決定されている. そして. Schröder series が発散する場合でも. stable ではないということはわかる。従ってこの場合に. unstable mixed のいづれであるかを決定することができれば. holomorphic iteration の stable, unstable, mixed への分類は. 完了することになる。前節の定理を応用すれば.

次の結果を得る.

<u>命題</u>: $|\lambda|=1$ かつ λ は1の巾根ではないとする. このとき. f に対する Schröder series が発散.
$\Longrightarrow$ f は0において mixed.

∵) 前節の定理1.(C)により. f が0において. asymtotic ではないことを示せば十分である。
そこで f が0で正に asymtotic であるとして矛盾を導く。正に asymtotic とすると. 定義により. 0の近傍 U と自然数 n が存在して. $\overline{f^n(U)} \subset U$ となる。簡単の為 $n=1$ とする。いま.

$$f_r(z) = (1+r)\lambda z + a_2 z^2 + \cdots \qquad (r \in R)$$

と f_r を定義すれば. $|r|$ が十分小ならば $\overline{f_r(U)} \subset U$ が成り立つ。一方 $r<0$ のとき. f_r は0において負に asymtotic である. 従って. $f_r(V) \supset V$, $V \subset U$ となる0の近傍 V がとれる。すると. $\overline{f_r(U)} \subset U$ および $f_r(V) \supset V$ より, $V \subset D \subset U$, $f_r(D) = D$ となる D の存在がわかる。D を simply connected, open として一般性を失わないことはすぐわかる。そこで D を.

$\{|z|<1\}$ に写し、且つ 0 を fix する holomorphic map を φ とすると、$\varphi\circ f_r\circ\varphi^{-1}$ は $\{|z|<1\}$ をそれ自身に写す holomorphic map。従って

$$\varphi\circ f_r\circ\varphi^{-1}(z) = \mu z \qquad (|\mu| = 1)$$

でなければならない。ところが、

$$\varphi\circ f_r\circ\varphi^{-1}(z) = (1+r)\lambda z + \cdots\cdots$$

であるから、これは矛盾である。

f が負に asymtotic とした場合にも、同じ方法で矛盾に到達する。

References

[1]. G.D. Birkhoff, Surface transformations and their dynamical applications, Acta Math. vol 43 1-119 (1920)

[2]. C.L. Siegel, J.K. Moser, Lectures on celestial mechanics, Springer (1971).